Corrigé du sujet d'Amérique du Nord – Juin 2013

Exercice 1:

Question n°1 : $\boxed{\frac{5}{9}}$. [La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1 donc : $1-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{9}$.]

Question n°2 : $\boxed{11}$. [$(169-34\times4)\div3=11$.]

Question n°3 : **350 m**. [10% , c'est-à-dire un dixième, correspondent à 35 m. Donc $35\times10=350$.]

Question n°4 : **Le rectangle**.

Exercice 2:

Appelons x le nombre de billet de 5 € et y le nombre de billets de 10 €.

On obtient le système : $\begin{cases} x+y=21 & ① \quad \times(-5) \\ 5x+10y=125 & ② \end{cases}$

Résolution par combinaisons :

$$+\begin{cases} -5x-5y=-105 \\ 5x+10y=125 \end{cases}$$

$$5y=20$$
$$y=4$$

① $x+4=21$

$x=17$

Il y a $\boxed{17}$ billets de 5 € et $\boxed{4}$ billets de 10 €.

Exercice 3:

1)

Prix	Casque 1	Casque 2	Casque 3
Rollers gris	132	109	116
Rollers noirs	144	121	128

Il y a 4 résultats possibles sur un total de 6 donc la probabilité que l'ensemble coûte moins de 130 € est : $\frac{4}{6}=\boxed{\frac{2}{3}}$.

2) a) $144\times(1-\frac{20}{100})=144\times0{,}8=115{,}2$.

Le prix de cet ensemble après la réduction est de **115,20 €**.

b) **Oui**, en prenant en compte cette réduction il y a 5 résultats possibles. la probabilité devient donc $\frac{5}{6}$.

Exercice 4:

1) $1\,045 \div 76 = 13{,}75$.
   76 n'est pas un diviseur de 1 045 donc il ne peut pas faire 76 sachets.

2) a) On cherche un diviseur commun à 760 et 1 045, le plus grand possible, donc on cherche PGCD(760 ; 1 045).
   Utilisons l'algorithme d'Euclide :
   $1\,045 = 760 \times 1 + 285$
   $760 = 285 \times 2 + 190$
   $285 = 190 \times 1 + 95$
   $190 = 95 \times 2 + 0$
   Le dernier reste non nul est 95, donc PGCD(760 ; 1 045) = 95.
   Il peut donc réaliser le nombre maximal de $\boxed{\mathbf{95}}$ sachets.

   b) Il y aura $760 \div 95 = \boxed{\mathbf{8}}$ dragées au chocolat et $1\,045 \div 95 = \boxed{\mathbf{11}}$ dragées aux amandes par sachet.

Exercice 5:

1) $3 \times 4 + 0{,}25 = 12 + 0{,}25 = 12{,}25$.
   Or $3{,}5^2 = 12{,}25$ donc Julie obtient bien le carré de 3,5.

2) Pour calculer $7{,}5^2$ on peut effectuer le produit de 7 par 8 et rajouter 0,25.
   $7 \times 8 + 0{,}25 = 56 + 0{,}25 = 56{,}25$.

3) D'une part : $(n + 0{,}5)^2 = n^2 + 2\times n\times 0{,}5 + 0{,}5^2 = n^2 + n + 0{,}25$.
   D'autre part : $n(n + 1) + 0{,}25 = n^2 + n + 0{,}25$.

   L'égalité est vérifiée donc la conjecture de Julie est vraie.

Exercice 6:

1) x doit être compris entre 0 cm et 20 cm. (0 et 20 exclus)

2) $\mathscr{V} = \mathscr{B} \times h = (40 - 2\times 5)^2 \times 5 = (40 - 10)^2 \times 5 = 30^2 \times 5 = 900 \times 5 = 4\,500 \text{ cm}^3$.
   Pour $x = 5$ cm, le volume de la boîte est de $\boxed{\mathbf{4\,500\ cm^3}}$.

3) a) Le volume de la boîte est maximum pour $\boxed{\boldsymbol{x} \mathbf{= 6{,}5\ cm}}$.

   b) Le volume de la boîte est de 2 000 cm^3 pour $\boxed{\boldsymbol{x} \mathbf{= 1{,}5\ cm}}$ et $\boxed{\boldsymbol{x} \mathbf{= 14\ cm}}$.

Exercice 7:

1) ABCDE est un pentagone régulier donc l'angle au centre $\widehat{AOB}$ mesure $\dfrac{360}{5} = \boxed{72°}$.

2) a) [OA] et [OB] sont deux rayons d'un même cercle donc AOB est un triangle isocèle en O.
Or dans un triangle isocèle, la hauteur, la bissectrice et la médiatrice relatives au sommet principal sont confondues. Donc (OM) est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et la médiatrice de [AB].

b) • (OM) étant la bissectrice de $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOM} = 72 \div 2 = 36°$.

• Dans le triangle AOM rectangle en M, on a :

$$\sin \widehat{AOM} = \frac{AM}{OA}$$

$$\sin 36° = \frac{AM}{238}$$

$$AM = 238 \times \sin 36° \approx \boxed{\textbf{140 m}}.$$

c) • (OM) étant la médiatrice de [AB], M est le milieu de [AB].

Donc $AB \approx 140 \times 2$
≈ 280 m.

• ABCDE étant un pentagone régulier, ses 5 côtés ont la même longueur.

Donc son périmètre vaut environ $5 \times 280 = \boxed{\textbf{1 400 m}}$.

Exercice 8:

1) a) Pour calculer l'aire du trapèze ABCD, on peut calculer l'aire du grand rectangle puis soustraire les aires des deux triangles rectangles.

b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 3\times7 - \dfrac{3\times1}{2} - \dfrac{3\times3}{2} = 21 - 1{,}5 - 4{,}5 = \boxed{\textbf{15 cm}^2}$.

2) Testons chacune des 3 formules pour le trapèze ABCD de l'énoncé, c'est-à-dire avec les valeurs :
b = 3 cm, B = 7 cm et h = 3 cm. On doit obtenir le résultat 15 cm².

1ère formule : $A = \dfrac{(b\times B)\times h}{2} = \dfrac{(3\times7)\times3}{2} = \dfrac{21\times3}{2} = \dfrac{63}{2} = 31{,}5 \text{ cm}^2$.

2ème formule : $A = \dfrac{(b+B)\times h}{2} = \dfrac{(3+7)\times3}{2} = \dfrac{10\times3}{2} = \dfrac{30}{2} = 15 \text{ cm}^2$.

3ème formule : $A = 2\times(b + B)\times h = 2\times(3 + 7)\times3 = 2\times10\times3 = 60 \text{ cm}^2$.

La formule juste est donc la formule $\boxed{\mathbf{A = \dfrac{(b+B)h}{2}}}$.